NATIONALE BIOLOGIE OLYMPIADE

Omgaan met onderzoeksgegevens in de biologie

auteur: drs J. Morélis, SLO

Zelfstudie

Omgaan met onderzoeksgegevens in de biologie

Inhoud

Significante cijfers

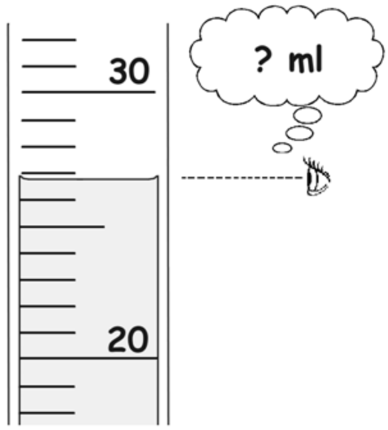
Bij het verwerken van onderzoeksgegevens moet vaak gerekend worden met getallen die op één of andere manier gemeten zijn. De nauwkeurigheid van die metingen bepaalt het aantal cijfers dat we in de einduitkomst mogen schrijven. Hoe dit in z'n werk gaat laten we zien aan de hand van een eenvoudig voorbeeld.

> *3,06 gram keukenzout wordt afgewogen met een balans en daarna opgelost in water.*
> *Vervolgens vullen we de oplossing heel nauwkeurig aan tot precies 1 liter.*
> *We hebben dan dus 3,06 gram per liter.*
> *Je kunt ook zeggen dat er per ml. steeds 3,06 mg. keukenzout zit.*
> *Met een maatcilinder meten we 26,8 ml. van de zoutoplossing af.*
> *Hoeveel zout hebben we nu?*

We nemen de rekenmachine, typen 3,06 * 26,8 in en lezen af.
De uitkomst is 82,008 (mg).

Hier klopt iets niet. We beginnen met twee getallen van maar drie cijfers en krijgen een uitkomst van vijf cijfers, waarvan drie achter de komma. De uitkomst is veel nauwkeuriger dan de meetwaarden waarmee we begonnen. Dit kan natuurlijk niet.

Laten we nog eens kijken naar het aflezen van de maatcilinder (zie afbeelding).
Hoeveel hebben we hier? In ieder geval meer dan 26 ml maar minder dan 27 ml. Waarschijnlijk is het 26,8 ml, maar 26,7 ml en 26,9 ml zijn ook acceptabel. Het laatste cijfer is dus geschat. Dat is bijna altijd zo met meetwaarden, dus ook met de afgewogen hoeveelheid keukenzout van 3,06 gram. Dat had net zo goed 3,05 gram of 3,07 gram kunnen zijn.
In plaats van 26,8 * 3,06 = 82,008 (mg) is ook mogelijk als uitkomst:
    26,7 * 3,05 = 81,435 (mg)
of   26,9 * 3,07 = 82,583 (mg)



We zullen moeten *afronden,* dat wil zeggen één of meer van de laatste cijfers weg laten.
Daarbij geldt:
als het eerste van de geschrapte cijfers 5 of meer is wordt het daarvóór staande cijfer (dus het meest rechtse van de op te schrijven cijfers) met 1 vermeerderd. Kijkend naar de uitkomsten lijkt het redelijk "tot op 3 cijfers" af te ronden. Dus:
82,008 wordt 82,0
81,435 wordt 81,4
82,583 wordt 82,6

Conclusie: de hoeveelheid zout in de maatcilinder ligt vrijwel zeker tussen 81,4 mg en 82,6 mg met 82,0 als meest waarschijnlijke uitkomst.
Van het oorspronkelijke antwoord (82,008) zijn - na afronding op 82,0 - dus alleen de eerste drie cijfers van betekenis.
We noemen dit ***significante*** cijfers.

Cijfers die betekenis hebben noemen we significante cijfers

Bij berekeningen schrijven we in de einduitkomst alleen de significante cijfers.
Cijfers die geen betekenis hebben laten we weg.
Het aantal significante cijfers zegt iets over de nauwkeurigheid, *het aantal cijfers achter de komma niet*. We lichten dit toe met een voorbeeld
Een autofabrikant die opgeeft dat een bepaald model 4135 mm lang is zou net zo goed kunnen schrijven:
431,5 cm of 43,15 dm of 4,315 m.
Het aantal significante cijfers is hier steeds gelijk aan vier en de nauwkeurigheid is in de getallen 4315 - 431,5 - ; 43,15 en 4,315 even groot. Desnoods kun je ook 0,004315 km schrijven. Het aantal significante cijfers is dan nog steeds gelijk aan vier. De nullen, die links staan in tiendelige breuken tellen dus niet mee als significante cijfers.

Voorbeeld

0,00*123* heeft 3 significante cijfers.
0,0*10* heeft 2 significante cijfers
0,*2* heeft 1 significant cijfer
Dit type notaties is overigens eenvoudig te vermijden door een getal te schrijven als het product van een getal tussen 1 en 10 en een macht van 10. Bijvoorbeeld:
0,*318* = $3{,}18 * 10^{-1}$ (3 significante cijfers)
0,0*2* = $2 * 10^{-2}$ (1 significant cijfer)
0,00*306* = $3{,}06 * 10^{-3}$ (3 significante cijfers)
0,000*140* = $1{,}40 * 10^{-4}$ (3 significante cijfers)
We noemen dit ook wel de *wetenschappelijke notatie.*

In hoeveel significante cijfers moeten we nu de uitkomst van een berekening schrijven? Dit hangt natuurlijk af van de nauwkeurigheid van de gevonden meetwaarden waar we mee gaan rekenen. In het voorbeeld van de zoutoplossing bleek dat 21,2 * 3,08 als uitkomst een getal met 3 significante cijfers opleverde. Hoe nauwkeuriger de meetwaarden, des te meer cijfers mogen we schrijven. In de praktijk gebruiken we *bij vermenigvuldigen en delen* de volgende ***vuistregel*.**

De uitkomst van een berekening heeft even veel cijfers als het gegeven met het minste aantal significante cijfers

Voorbeeld

Een rechthoekige kamer meet 3,5 x 4,5 m.
Wat is de oppervlakte?
3,5 * 4,5 = 15,75;
We moeten afronden op 2 significante cijfers:de oppervlakte is 16 $m^{2.}$

Een fles wijn van 75 cl bevat 11,5 % alcohol.
Hoeveel cl alcohol is dat ?

$$\frac{11{,}5}{100} * 75 = 8{,}625$$

We moeten weer afronden op 2 significante cijfers: in de fles zit 8,6 cl alcohol.

Let op:
- Bij het afronden letten we alleen op *meetwaarden* en niet op *telwaarden*.
  Als je viermaal 25,0 ml afmeet dan heb je dat niet 3,7 of 4,4 keer gedaan.
  De uitkomst blijft in dit geval in 3 cijfers significant.
- In het spraakgebruik is men soms slordig. Als we spreken van één liter melk bedoelen we niet een hoeveelheid die tussen 0,5 en 1,4 liter in ligt.
- Bij berekeningen moet je niet tussentijds afronden, maar alleen de einduitkomst.

We hebben het tot nu toe gehad over de nauwkeurigheid van uitkomsten bij vermenigvuldigen en delen. Bij *optellen en aftrekken* van meetwaarden gelden andere regels. Daarbij gaat het om het aantal cijfers (decimalen) achter de komma.
Bijvoorbeeld lengtes optellen:

> 243,3 cm + 1,43 cm = 244,73 cm.
> Dit is niet goed, het juiste antwoord is 244,7 (één decimaal net als 243,3).
>
> *Bij optellen en aftrekken mag de einduitkomst niet meer cijfers achter de komma hebben dan het (meet)resultaat met het kleinste aantal decimalen.*

Tenslotte

In angelsaksische landen wordt de zogenaamde decimale komma als een punt geschreven.
Dus waar wij 3,14.. voor het getal pi schrijven doet men dat daar als 3.14!
Dit kan tot verwarring leiden, vooral bij het invoeren van getallen als we angelsaksische meet-apparatuur of computer-programmatuur gebruiken.

Iets soortgelijks geldt voor het schrijven van duizendtallen.
5000 wordt in de meeste landen ook wel als 5.000 geschreven, maar in angelsaksische landen schrijft men in dat geval geen punt, maar een komma: 5,000 .

Let vooral op dit subtiele verschil bij het invoeren van gegevens in de computer.

Normale verdeling en waarschijnlijkheid

Bij onderzoek ga je gewoonlijk uit van een steekproef.
Je onderzoekt niet alles maar slechts een representatief deel.

Het gemiddelde van de uitkomsten, voorgesteld door $\overline{x}$ is: $\overline{x} = \frac{1}{n} \sum x_i$

waarin n = aantal uitkomsten (resultaten).

$\overline{x}$ kan afwijken van de werkelijke waarde van het gemiddelde, die meestal voorgesteld wordt door µ. Bij oneindig veel waarnemingen geldt $\overline{x} = \mu$.

Een maat voor de nauwkeurigheid en dus betrouwbaarheid van een gemiddelde uitkomst is de spreiding, dus het verschil tussen de minimale en de maximale waarde.
Hoe verder die uiteen liggen hoe minder betrouwbaar is het onderzoek.

In de praktijk wordt meestal niet met de spreiding, maar met de zogenaamde *standaardafwijking* of *standaarddeviatie s* gewerkt voor het aangeven van de betrouwbaarheid van uitkomsten. Hiervoor geldt;

$$s = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \overline{x})^2}{n-1}}$$

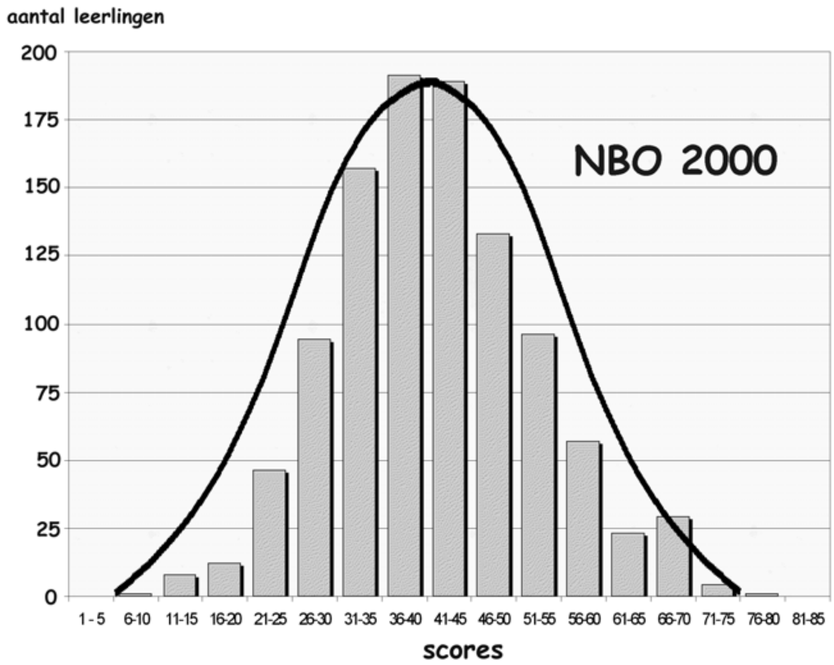
die je eventueel kunt omwerken tot:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\left[\sum x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum x_i\right)^2\right]}$$

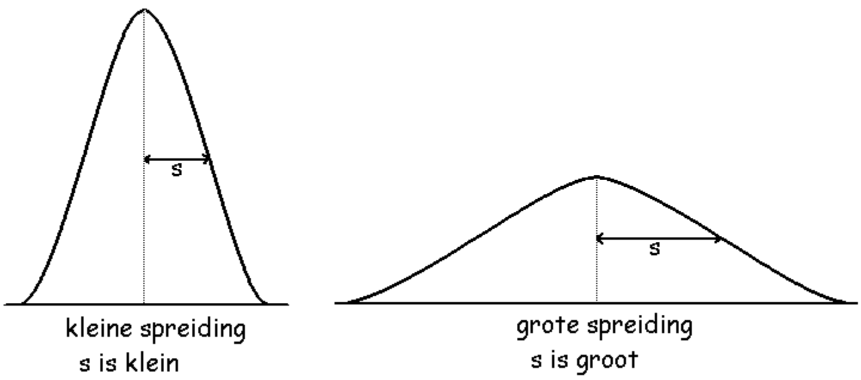
De werkelijke waarde van s vind je weer bij oneindig veel waarnemingen. Dit wordt voorgesteld door de griekse letter σ (sigma). Ook bekend als grootheid is de zogenaamde *variantie* σ^2, die dus benaderd wordt door:

$$\text{variantie} \approx \frac{1}{n-1} * \sum (x_i - \overline{x})^2$$

Bij een zogenaamde *normale* verdeling van uitkomsten/resultaten ontstaat er een mooie symmetrische klokvormige curve als de resultaten grafisch worden uitgezet. Voorbeelden hiervan zijn de scores van leerlingen bij de biologie olympiade of de lengte van alle nederlandse volwassen vrouwen.



Er bestaan ook *scheve* verdelingen, maar dat zullen we verder buiten beschouwing laten.
De *vorm* van de curve zegt iets over de *spreiding*.
Hoe meer alle gevonden waarden uit elkaar liggen des te groter is de spreiding en des te groter zal de standaardafwijking s zijn.
Het omgekeerde geldt natuurlijk ook: kleine spreiding → kleine standaardafwijking.
Zie figuur.



Merk op de standaardafwijking s gelijk is aan de afstand van het midden van de grafiek tot het buigpunt.
Het berekenen van s kan in de praktijk een heel gedoe zijn vanwege al die kwadraten in de formule. Maar een zak- of grafische *rekenmachine* lost dit probleem voor ons op. Vaak zitten statistische functies er standaard op of kun je ze er in programmeren. Bij zakrekenmachines zie je vaak zowel een σ_{n-1} als een σ_n knop. In het ene geval wordt in de gehanteerde formules steeds *n-1* in de noemer gekozen in het andere geval staat er alleen *n*. Het verschil heeft te maken met de omvang van de groep die bekeken wordt. Ga je uit van de totale populatie en sla je werkelijk niks over dan geldt σ_n. In de biologische praktijk komt dit eigenlijk nooit voor en werken we altijd met steekproeven ook al kunnen die soms heel groot zijn. Maar door uit te gaan van een steekproef bouw je een bepaalde onzekerheid in. Volgens het statistische spraakgebruik mis je één *vrijheidsgraad* in de n waarnemingen die je doet.

Het aantal vrijheidsgraden is niet n, maar n-1 wat betekent dat in de gebruikte formules σ_{n-1} een betere benadering is voor de standaardafwijking dan σ_n. Wij zullen ons ook steeds beperken tot het gebruik van de formule σ_{n-1}.[1]

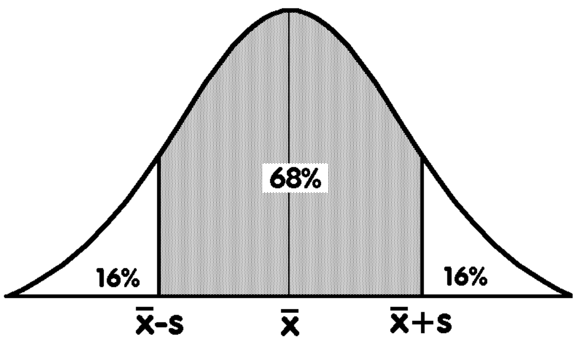
Het gebruik van rekentuig is natuurlijk erg handig bij het uitvoeren van statistische berekeningen, maar bedenk wel dat je in toetssituaties steeds duidelijk moet kunnen maken hoe je aan het antwoord komt.

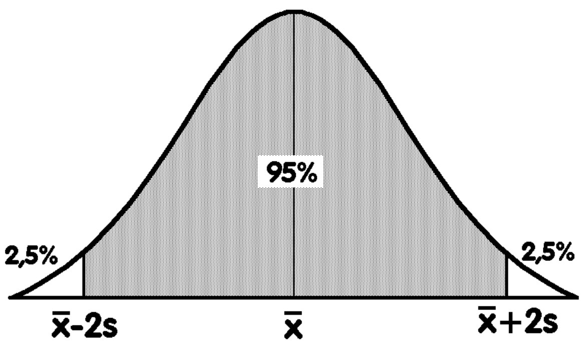
Opdracht: Een hulsttakje wordt geplukt en het aantal stekels per blad wordt geteld met het volgende resultaat.

7	14	12	17	12	6	9	12	15	12	8	10	12	11	14

Ga na hoe groot $\bar{x}$ en σ_{n-1} zijn
(Antwoord (afgerond): 11,4 en 3,0)

De standaarddeviatie is ook een handige grootheid om de *waarschijnlijkheid* van uitkomsten te wegen. Uit de praktijk blijkt:
$\bar{x} \pm s$ (eigenlijk $\mu \pm \sigma$) dekt 68% van alle waarden en
$\bar{x} \pm 2s$ dekt (afgerond) 95% van alle waarden.





Bij de linkercurve, het 68% gebied, bevinden de punten $\bar{x} - s$ en $\bar{x} + s$ zich bij de *buigpunten* van de grafiek.

In de biologie wordt veel een *waarschijnlijkheidsgebied* van 95% gehanteerd. Waarden die binnen dat gebied liggen vindt men acceptabel. Waarden die daar buiten liggen wijken zo sterk af dat men aanneemt dat er iets mee aan de hand is. Ze liggen in het uitzonderingsgebied.
In de praktijk mogen we dit 95 % waarschijnlijkheidsgebied dus afronden op: $\bar{x} \pm 2s$
(eigenlijk is het $\bar{x} \pm 1{,}96\,s$)

[1] In de literatuur is men vaak nogal inconsequent en bekommert men zich vaak niet om het verschil tussen *n* en *n-1*. De ene auteur gebruikt onder alle omstandigheden *n*, de ander *n-1*. Wij zullen zolang het om steekproeven gaat steeds uitgaan van *n-1*.

Voorbeeld: Van een representatieve steekproef van 1000 Nederlandse vrouwen blijkt: bij het vaststellen van de lichaamslengte:
$\bar{x}$ = 173,6 cm met s = 6,7 cm. (gegevens uit het jaar 1960).
Een vrouw heeft een lengte van 189 cm.
Is dit een "normale" of een "extreme" lengte?

We moeten de lengte van 189 cm aanvaardbaar (normaal) vinden als deze bevindt in het waarschijnlijkheidsgebied van 95%, dus $\bar{x} \pm 2\,s$.
Dit omvat 173,6 ± 2 * 6,7 , dat wil zeggen 160,2 tot 187,0 cm.
De waarde 189 valt daarbuiten.

Conclusie:
De bedoelde vrouw is niet representatief, haar lengte is extreem, en ligt in het uitzonderingsgebied. De kans op het voorkomen van een lengte van 189 cm blijkt immers kleiner dan 5% te zijn. Daarom wordt de vrouw aangemerkt als een bijzonderheid. Ze heeft een abnormale lengte.

In het statistisch jargon is het gebruikelijk in dit soort afwegingssituaties te spreken van het accepteren of verwerpen van de *nulhypothese* H_0.
Nulhypothese betekent:
een gevonden waarde of uitkomst past bij de populatie die we bekijken.

We accepteren de nulhypothese als we het verschil tussen de uitkomst en het gemiddelde van de populatie niet te groot vinden. In de praktijk betekent dit dat we een waarde acceptabel vinden zolang die zich bevindt in het 95 % waarschijnlijkheidsgebied. We vinden zo'n waarde "normaal" en passend bij de betrokken populatie.
Valt de gevonden waarde buiten het 95% waarschijnlijkheidsgebied zoals bij de vrouw van 189 cm lengte dan moeten we de nulhypothese verwerpen.

In het gegeven voorbeeld kan de vraag gesteld worden hoe groot eigenlijk de kans is op een lengte van 189 cm. Het is lastig dit terug te rekenen. Dit probleem heeft men als volgt ondervangen.
Deel de afwijking van het gemiddelde door de standaardafwijking, dus

$$\frac{\textit{uitkomst - gemiddelde}}{\textit{standaardafwijking}}$$

Je krijgt nu een dimensieloze grootheid die een maat is voor de extreemheid van de afwijking. Dit is de *excentriciteit* u[2].

In formule: $u = \left|\frac{x - \bar{x}}{s}\right|$

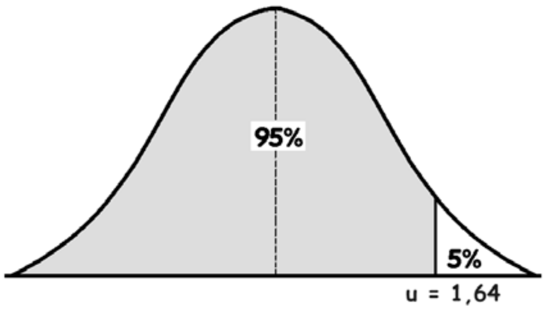
Hoe groter u des te groter is de afwijking dus des te groter is de kans dat de gevonden waarde niet representatief is. (H_0 verworpen)
In tabellen of diagrammen (zie bijlagen) kun je nu terugzoeken hoe groot bij een normale verdeling het waarschijnlijkheidsgebied en uitzonderingsgebied is dat bij een bepaalde waarde van u past. Daarbij moet wel gelet worden op de "richting" van een afwijking.
Als je zowel in afwijkingen naar boven als naar beneden bent geïnteresseerd dan moet je tweezijdige toetsen.

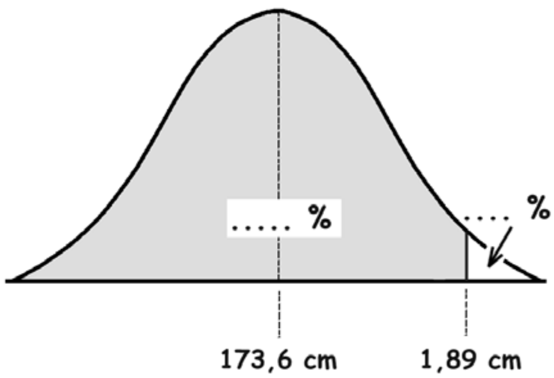
[2] In engelstalige literatuur ook wel aangeduid met z en de naam: *standardised normal deviate*

Maar ben je alleen geïnteresseerd in afwijkingen aan de bovenkant òf aan de onderkant van het spectrum dan toets je éénzijdig.
Het toetsen van alleen positieve afwijkingen (dus eenzijdig) komt het meeste voor.

In ons rekenvoorbeeld over de lengte van een vrouw keken we tweezijdig. Ons 5% uitzonderingsgebied omvatte zowel de vrouwen korter dan 160,2 als de vrouwen langer dan 187,0 cm.

We kunnen onze vraagstelling nu ook veranderen en als volgt stellen.
Hoe groot is de kans op een vrouw van 189 cm of langer. In dat geval toetsen we eenzijdig en de 95 – 5 % grens ligt in dat geval niet bij u = 1,96, maar bij u = 1,64.
Zie de tabel en het diagram in de bijlage.





We berekenen u nu als volgt:

$$u = \frac{189 - 173,6}{6,7} = 2,3 \text{ (afgerond)}$$

We zoeken op welk waarschijnlijkheidsgebied hier bij past (zie bijlage: normale verdeling).
In de grafiek lezen we bij u = 2,3 een waarschijnlijkheid af van 99%. De tabel geeft nauwkeuriger waarden namelijk 0,9893 bij u = 2,3 wat neer komt op 98,93%.
De waarde van 189 cm ligt op de grens 98,93 % - 1,07 %:
De kans op een vrouw met een lengte kleiner dan 189 cm is afgerond 99%.
Of: de kans op een vrouw met een lengte van 189 cm of meer is (afgerond) maar 1%.

Dit soort kansberekeningen komt in het dagelijks leven best vaak voor en het punt is dat er op grond van mogelijke kansen vaak belangrijke beslissingen moeten worden genomen. Waar ligt de grens voldoende-onvoldoende bij een proefwerk en hoe groot is de kans dat je iemand ten onrechte laat zakken.
Wat is de kans op het winnen van een prijs, het ziek worden tijdens een epidemie of het getroffen worden door een blikseminslag tijdens een onweer. Wat is een aanvaardbaar risico om iemand (misschien ten onrechte) te veroordelen wegens overmatig alcoholgebruik in het verkeer.

Ergens moeten we een grens trekken en daarmee nemen we een risico op een onterechte beslissing. In de natuurwetenschappen en dus ook in de biologie vinden we het aanvaardbaar om een risico van 5% te nemen. Alle uitkomsten die binnen het 95% waarschijnlijkheidsgebied liggen vinden we acceptabel en daarvoor geldt dus de eerder genoemde nulhypothese. Je kunt ook andersom redeneren. Alle situaties die meer dan 5% kans hebben om voor te komen moeten we accepteren als normaal omdat het toeval een rol kan spelen. Pas als een voorval of situatie minder dan 5 % kans heeft is het gebruikelijk te spreken van een *significant*e afwijking.

In het geval van de 189 cm lange vrouw mogen we aannemen dat de vrouw significant verschilt van de rest van de populatie en de kans dat we ons daarin vergissen is slechts 1% .

We geven nog enige voorbeelden om één en ander te verduidelijken.

Voorbeeld 1 polsslag

Volwassenen hebben gemiddeld een polsslag van 70. Lijders aan een bepaalde ziekte blijken gemiddeld een polsslag van 75 te hebben, met een standaardafwijking van 8,0.

Vraag: heeft de ziekte invloed op de polsslag?
We berekenen de excentriciteit:

$$u = \frac{x - \bar{x}}{s} = \frac{75 - 70}{8,0} = 0,625$$

Hierbij past (zie tabel normale verdeling in de bijlage) een waarschijnlijkheidsgebied dat ligt tussen 0,7324 en 0,7357, dus afgerond 74%. De polsslag wijkt wel naar boven af, maar niet significant. Je mag niet als conclusie trekken dat de ziekte invloed heeft op de polsslag, want in 26% van de gevallen is dat gewoon niet waar.
Je kunt ook zeggen: bij (afgerond) 1 op de 4 gevallen is er geen verschil.
We moeten in deze situatie daarom de nulhypothese H_0 accepteren en dat wordt natuurlijk vooral veroorzaakt door de nogal hoge waarde voor de standaardafwijking.

Voorbeeld 2 Magere melk

Gemiddeld bevat magere melk 5,8% vet met s = 0,6%. Een fles blijkt melk met slechts 4,5% vet te bevatten. Is dit significant minder?

$$u = \frac{x - \bar{x}}{s} = \frac{5,8 - 4,5}{0,6} = 2,17 \quad \text{(afgerond)}$$

Hierbij past (zie bijlage: tabel normale verdeling) een waarschijnlijkheidsgebied van 0,985 dus 98,5%. Met andere woorden: 98,5 % van alle flessen bevat meer dan 4,5 % vet of omgekeerd: de kans dat een fles 4,5% vet of minder bevat is maar 1,5%.
Dit is zo klein (minder dan 5%) dat we mogen aannemen dat de bekeken fles significant afwijkt van de rest. We mogen H_0 verwerpen.

Voorbeeld 3 Kippe eieren

Kippe eieren worden ingedeeld in gewichtsklassen. De grootste (zwaarste) gewichtsklasse bestaat uit zogenaamde "nulletjes" en dat zijn eieren die meer dan 68,5 gram wegen.
Op een kippenfarm is het gemiddelde eiergewicht 57,1 gram met een standaardafwijking van 7,6 gram.
Hoeveel % van de geproduceerde eieren bestaat uit nulletjes?

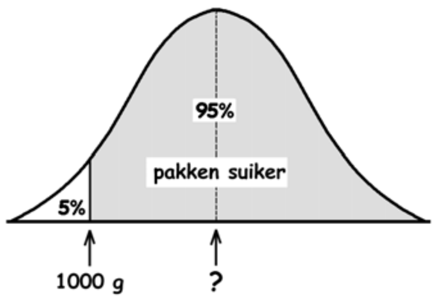
We vullen weer in:

$$u = \frac{x - \bar{x}}{s} = \frac{68,5 - 57,1}{7,6} = 1,5$$

Hierbij hoort een waarschijnlijkheidsgebeid van 93,32 % (zie bijlage: tabel normale verdeling) en dat betekent dat (afgerond) 93,3% van alle eieren lichter is dan 68,5 gram. Met andere woorden: 6,7 % van de eieren bestaat uit nulletjes.

Voorbeeld 4: Pakken suiker

Volgens het etiket bevat een pak suiker 1 kg suiker, of te wel 1000 gram.
Maar is dat ook zo? Er zijn immers kleine variaties bij het afvullen van de pakken in de fabriek. De fabrikant kan er niet mee volstaan om zijn afvulmachine precies op 1000 gram in te stellen, want dan krijgt de helft van de klanten te weinig en kan hij klachten verwachten. Daarom stelt de fabrikant zijn machine zo in dat 95 % van de pakken tenminste 1000 gram bevat.Uit metingen blijkt dat de spreiding in het vulgewicht overeenkomt met een standaardafwijking van s = 1,8 gram.
Op welke waarde moet de fabrikant zijn vulmachine instellen?
We zoeken in een tabel of diagram (zie bijlage) met gegevens over de normale verdeling op welke excentriciteit u past bij een waarschijnlijkheidsgebied van 95%.
We vinden: u = 1,645 en vullen in:



$$u = \frac{x - \bar{x}}{s} \quad \text{dus} \quad 1{,}645 = \frac{x - 1000}{1{,}8}$$

x = 1,645 * 1,8 + 1000 = 2,961, we ronden dit af op 3,0 gr (2 significante cijfers)

We zien dat de fabrikant zijn machine 3,0 gram hoger dan 1000 gr moet instellen.

T-toets

Vaak wil je twee waarnemingsreeksen (2 steekproeven) met elkaar vergelijken om te zien of ze significant van elkaar verschillen of niet. Dan is niet alleen de gemiddelde waarde en de standaardafwijking van belang maar ook het aantal waarnemingen per reeks. Hoe meer waarnemingen je hebt, des te betrouwbaarder kun je vergelijken.

In dit geval gebruiken we de toets van Student, de zogenaamde t-toets.

$$t = \frac{\text{verschil tussen de gemiddelden}}{\text{standaardafwijking van het gemiddelde van de twee}}$$

In formulevorm bij 2 reeksen A en B

$$t = \left| \frac{\bar{x}_A - \bar{x}_B}{s_{A,B}} \right| \qquad \text{waarbij} \quad s_{A,B} = \sqrt{\frac{s_A^{2}}{n_A} + \frac{s_B^{2}}{n_B}}$$

Voor $S_{A,B}$ bestaat geen duidelijke Nederlandse naam. In engelstalige litereatuur spreekt men wel van over *standard error of the difference* of sample means, wat hier is vertaald met standaardafwijking van het gemiddelde van de twee.

Vervolgens zoeken we t op in tabellen of diagrammen (zie bijlage: t-toets) en vinden dan hoe groot de kans is dat A en B significant verschillen (H_0 verworpen) of overeenstemmen (H_0 accepteren).
Bij dit opzoeken moeten we rekening houden met het aantal waarnemingen of beter gezegd: het aantal *vrijheidsgraden* (vaak aangeduid met df =degrees of freedom).

Bij reeks A is het aantal vrijheidgraden (df) gelijk aan n_A - 1 (dus "1" minder dan het aantal waarnemingen). Bij reeks B is dit n_B - 1.
Totaal zijn er dus $n_A + n_B - 2$ vrijheidsgraden.

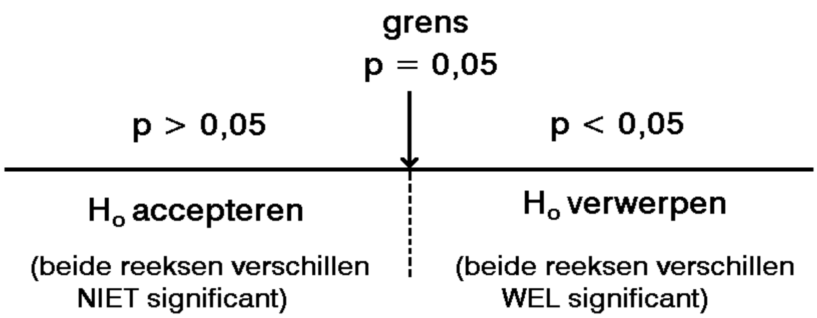
Merk de overeenkomst op tussen t en u.
Bij een oneindig aantal waarnemingen is t gelijk aan u. Vergelijk de tabellen voor de t-toets en de normale verdeling maar met elkaar en kijk bij de t-toets tabel naar df = ∞.

Om de t-toets te mogen toepassen moet voldaan worden aan de volgende drie min of meer vanzelfsprekende voorwaarden:

1. de beide steekproeven voldoen ieder aan de normale verdeling, de klokkekromme moet mooi symmetrisch zijn en niet scheef;
2. de standaardafwijking van de beide steekproeven moet ongeveer in dezelfde orde van grootte liggen, dus niet een kleine spreiding bij de één en een grote spreiding bij de ander;
3. de beide steekproeven moeten onafhankelijk van elkaar zijn; de uitkomsten van de ene reeks mogen niet van invloed zijn op de uitkomsten van de andere reeks.

Bij het toepassen van de t-toets en het trekken van een conclusie is het gebruikelijk weer een risico van 5% te nemen. Met andere woorden: we mogen pas met zekerheid stellen dat de beide steekproeven van elkaar verschillen (H_o verworpen) of overeenstemmen (H_o accepteren) als we daar voor meer dan 95 % zeker van zijn.

In de tabellen en diagrammen voor t (zie bijlage) wordt meestal de kans aan gegeven dat beide steekproeven overeenstemmen (H_o accepteren).
In het nederlandse taalgebruik wordt dit de *overschrijdingskans* p genoemd.
De engelse term hiervoor is *level of significance*.
Het komt er op neer dat je H_o moet accepteren (de beide steekproeven verschillen niet significant) als p groter is dan 5 %.



We lichten de t-toets toe met enkele voorbeelden.

Voorbeeld 1 Eb en vloed

Aan een rotskust werd steeksproefgewijs de lengte van 10 mossels gemeten op twee verschillende plaatsen A en B.
Plek A staat voortdurend onder water, plek B is met eb boven water en met vloed onder water.
De resultaten staan in de tabel (lengte in mm).

Plek A	Plek B
43 – 60 – 36 – 31 –57 – 41 – 62 – 47 – 70 - 56	53 – 50 – 33 – 47 – 54 – 31 – 36 – 54 – 34 – 45

Het lijkt er op dat plek A gunstiger is voor de groei van de mossels dan plek B.
Dit is na te gaan met behulp van de t-toets.

Na enig rekenwerk vinden we:
mossellengte op plek A (gem) = 50,3 mm met $s_A = 12,6$
mossellengte op plek B (gem) = 43,7 mm met $s_B = 9,3$

$$s_{A,B} = \sqrt{\frac{s_A^2}{n_A} + \frac{s_B^2}{n_B}} = \sqrt{\frac{12,6^2}{10} + \frac{9,3^2}{10}} = \sqrt{\frac{245}{10}} = 4,95$$

$$t = \left| \frac{(\bar{x}_A - \bar{x}_B}{s_{A,B}} \right| = \left| \frac{(50,3 - 43,7)}{4,95} \right| = 1,33$$

Het aantal vrijheidsgraden df is (10 - 1) + (10 - 1) = 18.
Hierbij past een overschrijdingskans van 10 %. Zie bijlage: t-toets.
De kans dat de omstandigheden op de plaatsen A en B geen invloed hebben op de mosselgrootte (H_0 geaccepteerd) is slechts 10 %. Het is voor 90 % zeker dat plek A gunstiger is voor de mosselgroei dan plek B. Toch is dat niet genoeg om met zekerheid te stellen dat plek A en plek B significant verschillen, want in 10 % van de gevallen maken we dan een fout. Met andere woorden: we mogen de nulhypothese niet verwerpen. Pas als het voor meer dan 95 % zeker is ($p < 5\%$) mogen we spreken van een significant verschil.

Opm. Let op het aantal vrijheidsgraden.
Omdat er steeds gekeken wordt naar 10 mossels kom je in de verleiding aan te nemen dat het aantal vrijheidsgraden df gelijk is aan df = 10 -1 = 9.
Maar dat is niet juist. In totaal zijn er 20 verschillende mossels in het spel en dus is df = 20 – 2 = 18.
Vergelijk dit met het volgende voorbeeld.

Voorbeeld 2 CO_2 opname/productie

Een student wil nagaan of de CO_2 opname overdag en de CO_2 afgifte ’s nachts van elkaar verschilt. Hij gaat dit na in een experiment met 13 planten, die continu op een constante temperatuur van 30 °C worden gehouden.

CO_2 uitwisseling (in mg g^{-1} per uur)		
Plant	opname overdag	afgifte 's nachts
A	1,2	2,1
B	1,5	2,0
C	1,6	2,2
D	1,7	2,7
E	1,7	2,4
F	1,9	1,8
G	2,0	2,4
H	2,0	2,0
I	2,1	2,3
J	2,3	2,6
K	2,5	2,7
L	2,6	2,5
M	2,9	3,0

Zo te zien is de afgifte ‘nachts groter dan de opname overdag. Hoe zeker is dit?

Antwoord:

We berekenen de gemiddelde hoeveelheden en de standaardafwijking.
Dit levert het volgende resultaat.

CO_2 uitwisseling	gemiddelde hoev.	standaardafwijking
overdag	2,00	0,48
's nachts	2,36	0,34

$$s_{1,2} = \sqrt{\frac{0{,}48^2}{13} + \frac{0{,}34^2}{13}} = 0{,}16$$

$$t = \left|\frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}{s_{1,2}}\right| = \left|\frac{(2{,}36 - 2{,}00)}{0{,}16}\right| = 2{,}17$$

Het aantal vrijheidsgraden (df) is 13 - 1 = 12
Let op: in dit geval is er maar één groep van 13 planten die gevolgd wordt dus is het aantal vrijheidsgraden df niet gelijk aan 24, maar 12.

We zoeken op (zie bijlage: t-toets) welke overschrijdingskans past bij t = 2,17 en df = 12 en vinden een waarde die in de buurt ligt van 2,5 %. Dit is significant.
Het is in deze situatie voor 97,5 % zeker dat de CO_2 opname overdag kleiner is dan de CO_2 afgifte 's nachts.

Voorbeeld 3 Nestkasten

In een ecosysteem broeden koolmezen en pimpelmezen. Uit tellingen bij de nestkasten blijkt dat de volgende aantallen jonge mezen uitvliegen

Koolmezen (6 kasten)	Pimpelmezen (5 kasten)
3 – 5 – 3 – 2 – 2 – 3	2 – 1 – 4 – 0 – 3

Het lijkt er op of de koolmezen een groter voortplantingssucces hebben dan de pimpelmezen. Met behulp van de t-toets gaan we na of er inderdaad sprake is van een significant verschil.

Berekening van gemiddelden en standaardafwijkingen levert

	Aantal kasten	Gemiddeld uitvliegen	s	Aantal vrijheidsgraden
koolmees	6	3,0	1,10	5
pimpelmees	5	2,0	1,58	4

Standaardafwijking van het verschil van de gemiddelden:

$$s_{1,2} = \sqrt{\frac{1{,}10^2}{6} + \frac{1{,}58^2}{5}} = 0{,}84$$

Toets van student: $t = \left| \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s_{1,2}} \right| = \left| \frac{(3{,}0 - 2{,}0)}{0{,}84} \right| = 1{,}2$ (afgerond)

Het aantal vrijheidsgraden is 5 + 4 = 9.
We zoeken weer op welke overschrijdingskans hier bij hoort en vinden een waarde die ligt tussen 10 en 20%. Met behulp van speciale rekenprogramma's of nauwkeurige grafieken vinden we als juiste waarde 13,2 %.
Dat is te weinig om met voldoende zekerheid te kunnen vaststellen dat de koolmezen succesvoller zijn dan de pimpelmezen.
Weliswaar is dit zo in (afgerond) 87% van alle gevallen, maar dit is niet voldoende.
In 13 % van de gevallen maak je een vergissing.
Pas als de overschrijdingskans kleiner is dan 5% mag je met stelligheid beweren dat beide populaties significant verschillen in voortplantingssucces.

Voorbeeld 4 Leerpil

Een groep van 22 studenten deed een geheugentest voor en na het slikken van een leerpil. De tabel laat het aantal woorden zien dat iedere student wist te onthouden.

De resultaten waren:

aantal onthouden woorden voor en na het slikken van de leerpil					
student	voor	na	student	voor	na
1	8	11	12	16	21
2	10	8	13	22	21
3	12	15	14	24	24
4	14	12	15	20	22
5	14	14	16	24	25
6	15	12	17	22	28
7	16	23	18	28	25
8	16	12	19	29	29
9	16	15	20	30	29
10	18	22	21	30	25
11	20	18	22	34	35

Heeft de leerpil een significante invloed op de geheugentest?
Dat gaan we na met de t-toets.

*B*erekening levert:

aantal onthouden woorden	voor	na
gemiddelde	19,9	20,3
standaardafwijking	7,08	7,13

$$s_{1,2} = \sqrt{\frac{7{,}08^2}{22} + \frac{7{,}13^2}{22}} = \sqrt{\ } \ 4{,}59 = 2{,}14$$

$$t = \left| \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s_{1,2}} \right| = \left| \frac{(20{,}3 - 19{,}9)}{2{,}14} \right| = 0{,}17$$

Het aantal vrijheidsgraden (df) is 21 (geen 42, er is maar één populatie!).
Uit t-toets tabellen en diagrammen (zie bijlage) blijkt dat de overschrijdingskans hoger is dan 40% (het is om precies te zijn 43,3 %). Met andere woorden we moeten de nulhypothese accepteren. De pil heeft wel invloed, maar die uitspraak is maar voor (afgerond) 57 % zeker en dat is bij lange na niet genoeg om over een significant verschil te kunnen spreken.

Enkele opmerkingen:

1 In tabellen en diagrammen voor t moet onderscheid gemaakt worden tussen eenzijdig en tweezijdig toetsen. Wil je alleen maar verifiëren of de nulhypothese geaccepteerd of verworpen moet worden dan moet je in principe het hele gebied meenemen, dus tweezijdig toetsen. Maar wil je nagaan of reeks A beter of groter is dan reeks B dan moet je eenzijdig toetsen.
In de praktijk pleegt men echter nogal slordig om te gaan met dit onderscheid. Eenzijdig toetsen komt het meeste voor en daar zullen we ook steeds stilzwijgend van uitgaan.

2 Het komt wel eens voor dat tabellen voor de t-toets niet de overschrijdingskans p aangeven, maar juist de kans dat beide populaties verschillen, dus (100 – p) %. Houdt dat in de gaten.

3 Als bij een t-toets voor p een waarde van 90% of hoger gevonden wordt dan is dat verdacht. Het betekent dat beide bekeken steekproeven voor meer dan 90 % overeenstemmen. Dit riekt naar sjoemelen met de resultaten om zo te proberen geen verschil te kunnen aantonen.

Toegift: aardige info over de Biologie Olympiade

Jongens beter dan meisjes?

In 1999 deden de volgende aantallen leerlingen mee aan de biologie olympiade. De gemiddelde score en standaardafwijking is ook aangegeven.

leerlingen	aantal	gem. score	standaard-afwijking
meisjes	686	40,2	11,7
jongens	698	45,4	13,7
totaal	1384	42,8	pm

Met hoeveel % zekerheid kan gesteld worden dat de jongens in 1999 iets beter waren dan de meisjes?

Bereken de standaardafwijking voor het verschil van de gemiddelden:

$$s_{j,m} = \sqrt{\frac{11{,}7^2}{686} + \frac{13{,}7^2}{698}} = 0{,}68$$

en bepaal t uit: $t = \left| \frac{\bar{x}_j - \bar{x}_m}{s_{j,m}} \right|$

$$t = \frac{45{,}4 - 40{,}2}{0{,}68} = \frac{5{,}3}{0{,}68} = 7{,}8 \quad \text{(afgerond)}$$

Het totaal aantal vrijheidsgraden is 1384 dus oneindig: ∞.
De kans dat we de nulhypothese moeten accepteren en dat de resultaten van jongens en meisjes gelijkwaardig waren is veel kleiner dan 0,05 % (zie bijlage: t-toets). Het is voor meer dan 99,95 % zeker dat de jongens gemiddeld iets beter scoorden.

De Randstad

Bij de voorronde van de biologie olympiade 1997 werden de resultaten met elkaar vergeleken van de vier grote steden in de Randstad (groep A) en de plaatsen met minder dan 100.000 inwoners in de rest van het land (groep B). Van beide groepen werd een representatieve groep van 100 leerlingen geselecteerd met als resultaat:

Groep A: gemiddelde score = 49,4; standaardafwijking = 12,1
Groep B: gemiddelde score = 56,2; standaardafwijking = 14,6
Vraag: Met hoeveel % zekerheid kan gesteld worden dat de kleinere plaatsen het beter doen dan de "grote vier"?

Antwoord:

$$S_{A,B} = \sqrt{\frac{14{,}6^2}{100} + \frac{12{,}1^2}{100}} = 1{,}9 \text{ (afgerond)}$$

$$t = \frac{(56{,}2 - 49{,}4)}{1{,}9} = 3{,}6$$

Het aantal vrijheidsgraden is (100-1) + (100 -1) = oneindig.
Conclusie: de verschillen zijn zeer significant met een zekerheid van meer dan 99,9 %.

100.000 inwoners

In een representatieve steekproef van 100 leerlingen afkomstig uit steden met meer dan 100.000 inwoners blijkt de gemiddelde score 55,7 te zijn met een standaardafwijking van 14,2.
Vraag: Met hoeveel % zekerheid kan gesteld worden dat plaatsen met minder dan 100.000 inwoners het beter doen dan plaatsen met meer dan 100.000 inwoners?

Antwoord:

$$S_{A,B} = \sqrt{\frac{14{,}6^2}{100} + \frac{14{,}2^2}{100}} = 2 \text{ (afgerond)}$$

$$t = \frac{(56{,}2 - 55{,}7)}{2} = 0{,}25$$

Het aantal vrijheidsgraden is oneindig.
De overschrijdingskans is 40 %.
De kans dat beide populaties verschillen is circa 60 %. Dat is niet significant.

De Tweede Wet van Morélis-Kranenburg

Volgens de 2^e^ Olympiade wet van Morélis-Kranenburg geldt:

> *De kwaliteit van een intellectuele prestatie bij organismen behorend tot het species Homo sapiens is omgekeerd evenredig met het aantal vlinders in de buik van de betrokken individuën.*

Reinier de Adelhart Toorop, finalist in 2002 bedacht hiervoor de volgende inspirerende opgave:

Aan de Nationale Biologie Olympiade 2002 deden twintig personen mee, twaalf jongens en acht meisjes. In deze groep vormden zich drie paartjes. Bij de zes verliefden was de gemiddelde score 350 punten met een standaardafwijking van 37,8. De overigen scoorden gemiddeld 398 punten (σ = 45,8).
Toon aan dat de 2e wet van Mr-Kr opgaat.
Antwoord:

	μ	σ
V (verliefden)	350	37,8
NV (niet-verliefden)	398	45,8

$$\sigma_{N,NV} = \sqrt{\frac{37{,}8^2}{6} + \frac{45{,}8^2}{14}} = \sqrt{238 + 149} = 19{,}7$$

$$t = \frac{398 - 350}{19{,}7} = 2{,}43$$

Er zijn 18 vrijheidsgraden.
Dit geeft volgens de t-toets tabel een overschrijdingskans van 2,5 tot 1%.
De juiste waarde blijkt 1,3 % te zijn.
Oftewel het is 98,7 % zeker dat de Tweede Wet hier opgaat.

Opm: Eigenlijk wordt hier niet voldaan aan het criterium dat beide groepen (V en NV) ongeveer even groot moeten zijn, maar wie daar op let is een kniesoor.

χ^2 –toets (chi-kwadraat)

We hebben gezien dat we de t-toets gebruiken als we twee steekproeven met elkaar willen vergelijken. Gewoonlijk is dan de vraag:
berusten de gevonden verschillen tussen beide steekproeven op toeval en mogen we dus aannemen dat beide steekproeven deel uitmaken van eenzelfde populatie (nulhypothese H_0 geaccepteerd) of zijn de verschillen dermate groot dat we moeten concluderen dat beide steekproeven significant verschillen en dus deel uitmaken van verschillende populaties (nulhypothese H_0 verworpen).

Het komt ook vaak voor dat we willen nagaan of gevonden resultaten voldoen aan een bepaalde vooropgestelde verwachting of hypothese. De vraag is dan: kloppen de uitkomsten met onze "theorie" of niet?
In dit geval gebruiken we de zogenaamde χ^2-toets (chi-kwadraat) om onze veronderstelling te verifiëren. Bij deze methode moeten we net als bij de t-test enkele rekenkundige bewerkingen uitvoeren en vervolgens met behulp van tabellen of diagrammen nagaan of de gevonden afwijkingen aanvaardbaar zijn of niet.

De berekeningen die moeten worden uitgevoerd zijn betrekkelijk simpel. Het gaat om:

$$\chi^2 = \sum \frac{(O - E)^2}{E} \quad \text{waarbij}$$

O = gevonden (observed) waarde (uitkomst, getal)
E = verwachte (expected) waarde (uitkomst, getal)

Wiskundig komt dit neer op het bepalen van de relatieve afwijking in het kwadraat van de te verwachten waarden en vervolgens met tabellen vaststellen wat nog accepteerbaar is. Hoe dit precies in zijn werk gaat kunnen we het beste illustreren met enkele voorbeelden.

Voorbeeld 1: Vangen en terugzetten

Op vijf verschillende plekken worden met precies hetzelfde type vallen gedurende een bepaalde tijd muizen gevangen. Na een tijdje zijn in totaal 95 muizen gevangen. De vallen verschillen niet. Als alle plekken qua biotoop gelijkwaardig zijn dan mag je per val 19 muizen verwachten.
Onze nulhypothese is dus: de 5 plekken verschillen biotopisch niet en E = 19 voor iedere val.
Maar de werkelijke gevonden waarden (O) blijken per val af te wijken van 19, namelijk (zie tabel)

Val	Gevangen (O)	Afwijking (O-E)
1	23	4
2	7	12
3	25	6
4	18	1
5	22	3
Totaal	95	

We vullen dit in:

$$\chi^2 = \frac{4^2}{19} + \frac{12^2}{19} + \frac{6^2}{19} + \frac{1^2}{19} + \frac{3^2}{19} = \frac{16 + 144 + 36 + 1 + 9}{19} = 10{,}8$$

Nu moeten we in een χ^2 tabel of diagram (zie bijlage) opzoeken met welke overschrijdingskans deze waarde van χ^2 overeenkomt. Net als bij de t-toets moet daarbij rekening gehouden worden met het aantal vrijheidsgraden.
In dit geval zijn er 5 vallen dus het aantal vrijheidsgraden n - 1 = 4.
In dit geval blijkt dat er slechts 1 tot 5% kans is dat we mogen aannemen dat de situaties bij de 5 vallen identiek is
Zie bijlage: chi-kwadraat tabel of chi-square diagram.
Bij $\chi^{2=}$ 10,8 vinden we p = 3%.
Conclusie: de nulhypothese is verworpen.
Met andere woorden: het is vrij zeker dat de 5 biotopen niet allemaal identiek zijn.
De kans daarop is 97%.

Voorbeeld 2: Dihybride kruisingen

Twee zuivere lijnen van Nicotiana tabacum worden gekruist: P_1 = gesteeld lichtgroen blad en P_2 = ongesteeld donkergroen blad. De F_2 bestaande uit 256 individuen ziet er als volgt uit:
130 gesteeld donker blad
54 ongesteeld donker blad
60 gesteeld licht blad
12 ongesteeld licht blad.
We stellen als nulhypothese: de resultaten voldoen aan de voorwaarden van een onafhankelijke overerving (geen koppeling van allelen) met fenotypen in de verhouding 9 : 3 : 3 : 1.
Bij een verhouding 9 : 3 : 3 : 1 mogen we bij 256 individuen als resultaat
144 : 48 : 48 : 16 verwachten.

E	O	Afwijking
144	130	14
48	54	6
48	60	12
16	12	4

Berekening: $\chi^2 = \frac{14^2}{144} + \frac{6^2}{48} + \frac{12^2}{48} + \frac{4^2}{16} = 6{,}1$

Er zijn 4 groepen resultaten dus het aantal vrijheidsgraden n - 1 = 3.
Volgens de χ^2 tabel of grafiek (zie bijlage) hoort hier een overschrijdingskans bij van iets meer dan 10%.
Het bijbehorende waarschijnlijkheidsgebied is bijna 90 %. We hebben een kans van ruim 10 % dat we ons vergissen als we de nulhypothese verwerpen. Dat is een te groot risico. We moeten accepteren dat er inderdaad sprake kan zijn van een onafhankelijke overerving.

Voorbeeld 3: Maagzweren

Bij een bevolkingsonderzoek worden 4871 personen gescreend op het voorkomen van maagzweren met het volgende resultaat.

Leeftijd in jaren	Aantal ondervraagd	Aantal met maagzweer	Verwacht	Afwijking
15-24	499	8	32	24
25-34	1128	39	73	34
35-44	1375	96	89	7
45-54	1089	106	71	35
55-64	625	55	41	14
65-74	155	12	10	2
Totaal	4871	316		

De nulhypothese is:
leeftijd heeft geen invloed op het voorkomen van maagzweren of
de kans om een maagzweer te krijgen is steeds even groot.
We moeten er rekening mee houden dat het aantal ondervraagde personen per onderzochte groep verschilt. De gemiddelde kans op een maagzweer is voor de totale populatie gelijk aan: $\frac{316}{4871}$
Dit is afgerond 6,5%. In de tabel is ingevuld wat dit per leeftijdsgroep betekent voor de te verwachten maagzweerfrequentie en de afwijking daarvan.

$$\chi^2 = \frac{24^2}{32} + \frac{34^2}{73} + \frac{7^2}{89} + \frac{35^2}{71} + \frac{14^2}{41} + \frac{2^2}{10} = 57 \text{ (afgerond)}$$

Er zijn 6 groepen dus het aantal vrijheidsgraden is n - 1 = 5.
Uit de tabel blijkt dat χ^2 ver uitkomt boven de waarde die bij de waarschijnlijkheid 0,1% hoort. Kortom: de nulhypothese wordt verworpen. Het al dan niet hebben van een maagzweer is dus niet gelijkmatig verspreid over alle leeftijdsgroepen.
We kunnen ook nagaan welke leeftijdsgroepen het meeste afwijken. Daarvoor hoeven we slechts ieder van de afzonderlijke waarden van $(O-E)^2/E$ te bekijken.

leeftijd	$(O-E)^2/E$
15-24	18
25-34	15,8
35-44	0,5
45-54	17,3
55-64	4,8
65-74	0,4

De leeftijdsgroepen 15-24 en 25-34 springen eruit met "te weinig" maagzweren.

De leeftijdsgroep 45-54 springt eruit met "te veel" maagzweren.

Welles-nietes

Tenslotte bespreken we twee voorbeeld die in de praktijk veel voorkomen.
Er is sprake van twee variabelen, die ieder alleen maar op twee manieren kunnen worden ingedeeld, namelijk *welles* of *nietes*. Dat levert 4 mogelijkheden op, namelijk:

A wel, B wel
A wel, B niet
A niet, B wel
A niet, B niet

Het lijkt er op dat er in dit geval 4 groepen en dus drie vrijheidsgraden zijn, maar we zullen zien dat het maar om één vrijheidsgraad gaat.

Voorbeeld 4 Associatie

Veel organismen vertonen associatie: als de één ergens voorkomt is de ander er ook, ontbreekt één van beiden dan zijn ze ook beiden afwezig. Vooral in plantengemeenschappen is dit een bekend fenomeen. Een voorbeeld is het voorkomen van brem (Cytisis) en struikheide (Calluna) in eenzelfde habitat.

In een perceel worden willekeurig 100 kwadranten van 1x1 m uitgezet.
Per kwadrant wordt nagegaan of brem en struikhei er in voorkomen.
Brem wordt 30 x aangetroffen, waarvan 17 x met struikhei en dus 13 x zonder struikhei
Struikhei wordt in totaal 40 x aangetroffen.
Met hoeveel zekerheid kan hier gesproken worden van associatie?

Uit de gegevens volgt voor de kwadranten:

	wel hei	niet hei	totaal
wel brem	17	13	30
niet brem			
totaal	40		100

We zien dat er maar een vrijheidsgraad is, want we kunnen nu alles invullen:

Observed	wel hei	niet hei	totaal
wel brem	17	13	30
niet brem	23	47	70
totaal	40	60	100

Er zijn in totaal 100 kwadranten uitgezet.
Maak nu niet de fout te veronderstellen dat de expected waarde voor ieder van de 4 categorieën gelijk zou zijn aan 100/4 = 25.
Je kunt de expected waarden bepalen door naar percentages of fracties te kijken.
Je krijgt dan:

wel brem, wel hei:	E = 0,30 * 0,40 * 100 = 12
wel brem, niet hei	E = 0,30 * 0,60 * 100 = 18
niet brem, wel hei	E = 0,70 * 0,40 * 100 = 28
niet brem, niet hei	E = 0,70 * 0,60 * 100 = 42

Hier gaan we mee rekenen.

kwadranten	O	E	$\lvert O-E \rvert$	$(O-E)^2/E$
wel brem, wel hei	17	12	5	2,1
wel brem, niet hei	13	18	5	1,4
niet brem, wel hei	23	28	5	0,9
niet brem, niet hei	47	42	5	0,6
		χ^2		5,0

Uit de χ^2 tabel blijkt dat bij χ^2 = 5,0 en df = 1 een overschrijdingskans hoort die ligt tussen 1 en 5 %.
Aflezen in het diagram (of berekenen met een speciale rekenmachine) levert een overschrijdingskans van 2,5 %.
Met andere woorden de kans dat er associatie is bedraagt 97,5 %. Dit is significant.

Voorbeeld 5 Rozen en zwarte vlekziekte

In een industriegebied met vuile lucht en in een er naast gelegen en vergelijkbaar toeristengebied met schone lucht worden rozenstruikjes onderzocht op de aanwezigheid van zwarte vlekken op de bladeren. Die zwarte plekken worden veroorzaakt door een schimmel. Op beide plaatsen worden steeksproefgewijs blaadjes verzameld met het volgende resultaat.

Plaats	Aantal blaadjes met zwarte vlekken	aantal blaadjes zonder zwarte vlekken	Totaal
industriegebied (vuile lucht)	564	495	1059
toeristengebied (schone lucht)	630	443	1073
totaal	1194	938	2132

De resultaten lijken er op te wijzen dat vuile lucht de schimmel minder (overlevings)kans geeft, want in het industriegebied met vuile lucht zijn veel minder blaadjes door de schimmel aangetast dan in het toeristengebied met schone lucht.
We gaan dit na met behulp van de χ^2 methode, waarbij de nulhypothese is dat vuile lucht en schone lucht niet verschillen in hun invloed op de schimmel.

Er zijn in totaal 2132 (564 + 495 + 630 + 443 = 2132 blaadjes geplukt.
Ook in dit geval kunnen we de expected waarden bepalen door te rekenen met fracties.

blaadjes	totaal	fractie
geplukt in industriegebied	1059	0,497
geplukt in toeristengebied	1073	0,503
zonder zwarte vlekken	938	0,440
met zwarte vlekken	1194	0,560

Het te verwachten aantal blaadjes in het industriegebied met zwarte vlekken zal nu gelijk zijn aan: 0,497 * 0,560 * 2132 = 593 (afgerond).
Evenzo voor blaadjes zonder zwarte vlekken afkomstig van een toeristengebied:
0,440 * 0,503 * 2132 = 472 (afgerond).
Idem industriegebied zonder zwarte vlekken: 0,497 * 0,440 * 2132 = 466 (afgerond)
en toeristengebied met zwarte vlekken: 0,503 * 0,560 * 2132 = 601 (afgerond)

situatie	O	E	|O-E|	$(O-E)^2/E$
industriegebied met zwarte vlekken	564	593	29	1,42
industriegebied zonder zwarte vlekken	495	466	29	1,80
toeristengebied met zwarte vlekken	630	601	29	1,40
toeristengebied zonder zwarte vlekken	443	472	29	1,78
		totaal (χ^2)		6,4

Als je de gegevens voor de schone lucht kent dan kun je die voor de vuile lucht ook uitrekenen. Dus is er hier slechts sprake van één vrijheidsgraad.

Uit de χ^2 tabel of grafiek (zie bijlage) blijkt dat χ^2 = 6,4 en df = 1 hoort bij een overschrijdingskans van ongeveer 1 %.
Kortom: de kans is maar 1% dat de verschillen tussen beide locaties op toeval berusten.
Je mag dus aannemen dat de vervuilde lucht in de industriegebieden inderdaad invloed heeft op het voorkomen van de zwarte vlek ziekte van de rozen.

Toegift: aardige info over de olympiade.

Oorkonden

Bij de biologie olympiade krijgt 25% van de leerlingen een oorkonde. In 1997 was de verdeling van de leerlingen en oorkonden over de provincies als volgt:

	leerlingen	**oorkonden**
Groningen	48	9
Friesland	68	20
Drente	28	8
Overijssel	116	25
Gelderland	220	55
Utrecht	72	13
Noord Holland	168	59
Zuid Holland	300	56
Zeeland	52	11
Noord Brabant	260	87
Limburg	128	22
Totaal	1460	365

Opm. Er waren geen deelnemers uit Flevoland.

a. Met hoeveel % zekerheid kan gesteld worden dat hier sprake is van een onevenwichtige verdeling van de oorkonden?
b. Bij welke vier provincies is de afwijking het grootste?
   Schrijf deze vier provincies op in de volgorde: meest afwijkend → minst afwijkend.

Antwoord:
a. We passen de chi-kwadraat methode toe:

We verwachten dat in iedere provincie 25 % van de deelnemers een oorkonde krijgt. Dus in Groningen 25 % van 48 = 12; in Friesland 25 % van 68 = 17, enz. Zie tabel.

	Gr	*Fr*	*Dr*	*Ov*	*Gld*	*Utr*	*NH*	*ZH*	*Zeel*	*NB*	*Limb*
E	*12*	*17*	*7*	*29*	*55*	*18*	*42*	*75*	*13*	*65*	*32*
O-E	*3*	*3*	*1*	*4*	*-*	*5*	*17*	*19*	*2*	*22*	*10*

$$\chi^2 = \sum \frac{(O-E)^2}{E} = \frac{9}{12} + \frac{9}{17} + \frac{1}{7} + \frac{16}{29} + 0 + \frac{25}{18} + \frac{289}{42} + \frac{361}{75} + \frac{4}{13} + \frac{484}{65} + \frac{100}{32} =$$

$$0{,}75 + 0{,}53 + 0{,}14 + 0{,}55 + 1{,}39 + 6{,}88 + 4{,}81 + 0{,}86 + 7{,}45 + 3{,}13 = 25{,}9$$

Er zijn 11 provincies dus 10 vrijheidsgraden.
Volgens de chi-kwadraat tabel is p< 1%
Het is meer dan 99 % zeker dat de verdeling onevenwichtig is.

b. De vier belangrijkste bijdragen aan de onevenwichtigheid zijn:
7,45 - 6,88 - 4,81 - 3,13 behorend bij de provincies
NB (te veel oorkonden) - NH (te veel oorkonden) - ZH (te weinig oorkonden) - Limb (te weinig oorkonden).

De 2e wet van Morélis-Kranenburg:

De kwaliteit van een intellectuele prestatie bij organismen behorend tot het species Homo sapiens is omgekeerd evenredig met het aantal vlinders in de buik van de betrokken individuën.

Rienier de Adelhart Toorop, finalist in 2002 bedacht hierbij de volgende opgave:

Aan de *Nationale Biologie Olympiade 2002* deden twintig personen mee, twaalf jongens en acht meisjes. In deze groep vormden zich drie paartjes. Slechts één verliefd persoon eindigde in de top-10.

Vraag: Met hoeveel zekerheid mag gesteld worden dat verliefdheid een negatieve invloed heeft op het behalen van een top tien positie

Antwoord:

	Top tien	Niet top tien
Verliefd	1 (V,TT)	5 (V,NTT)
Niet verliefd	9 (NV,TT)	5 (NV,NTT)

Van de twintig personen eindigden er uiteraard 10 in de top tien, dat is 50%.Volgens de nulhypothese haalt zowel van de niet verliefden als van de verliefden 50 % een top tien notering

situatie	O	E	|O-E|	$(O-E)^2/E$
V,TT	1	3	2	1,33
NV,TT	9	7	2	0,57
V,NTT	5	3	2	1,33
NV,NTT	5	7	2	0,57

$\chi^2 = 1{,}33+0{,}57+1{,}33+0{,}57 = 3{,}81$

Er is slechts één vrijheidsgraad.

Volgens de chi-kwadraat tabel is de kans vrijwel 95 % dat de verschillen in klassering niet door het toeval zijn veroorzaakt, kortom: verliefdheid heeft een negatieve invloed heeft op het behalen van een top tien positie.

De echte hamvraag is er natuurlijk alleen voor echte statistici: bepaal aan de hand van de verstrekte gegevens en de uitslag van de olympiade *wie* er nou precies verliefd waren (al heb ik geen idee of dat mogelijk is met deze beperkte hoeveelheid aanwijzingen).

Opmerkingen

De termen nulhypothese (meestal weergegeven met H_0) en overschrijdingskans (meestal weergegeven door de letter p) willen nogal eens aanleiding geven tot verwarring.
Je accepteert de nulhypothese als er geen significant verschil is aan te tonen tussen de twee aspecten die je bekijkt. Daarbij ben je bereid geen groter risico op een foute konklusie te nemen dan 5%.

De overschrijdingskans p geeft aan hoe groot de kans is dat een gevonden waarde past bij onze nulhypothese.
Des te kleiner p, des te eerder mogen we de nulhypothese verwerpen (des te zekerder zijn we van het bestaan van een afwijking).

Uit de definities van t en χ^2 zijn ook interessante conclusies te trekken.

$$t = \left|\frac{x_A - x_B}{s_{A,B}}\right|$$

t is groter naarmate de twee bekeken gemiddelde waarden meer van elkaar verschillen en de bijbehorende standaarddeviaties kleiner zijn. Als de kans groter is dat de twee betrokken waarden fors van elkaar verschillen dan is de nulhypothese H_0 minder waarschijnlijk en is er meer kans op een significant verschil.

Nu het omgekeerde: t is klein als de twee bekeken waarden maar weinig verschillen of minder nauwkeurig bekend zijn, zich uitend in relatief grote standaarddeviaties. In dat geval moet je eerder accepteren dat de twee waarnemingsreeksen tot dezelfde populatie kunnen behoren: H_0 eerder geaccepteerd.

Kortom: hoe groter t, des te meer kans op een significant verschil tussen beide steekproeven.

Soortgelijke redeneringen gelden ook voor χ^2.

$$\chi^2 = \sum\frac{(O - E)^2}{E}$$

Als χ^2 klein is dan betekent dit dat de gevonden en verwachte waarden weinig van elkaar verschillen. Des te kleiner χ^2 des te eerder mag je aannemen dat beiden tot dezelfde populatie behoren: H_0 geaccepteerd.
Als χ^2 groot is dan zijn er juist grote uitschieters in de gevonden waarden en mag je eerder aannemen dat de gevonden en verwachte waarden niet tot dezelfde populatie behoren:
H_0 juist verworpen.

Let ook op het aantal vrijheidsgraden bij de t-toets en de χ^2 -toets.

- Bij de t-toets moet je bij het bepalen van het aantal vrijheidgraden uitgaan van het totaal aantal aanwezige individuën.
- Bij χ^2 ga je uit van het aantal aanwezige groepen.

Biodiversiteit

Door menselijke ingrepen zoals houtkap in het tropisch regenwoud en het aanleggen van monocultures blijken diverse plant- en diersoorten uit te sterven.
In verband hiermee is *soortenrijkdom* of biodiversiteit een begrip dat wereldwijd prijkt op de agenda van biologen en voorvechters voor natuurbehoud.
In 1992 was er een groot internationaal Milieu Congres in Rio de Janeiro dat resulteerde in het aannemen van diverse resoluties en opstarten van activiteiten i.v.m. het terugdringen van verlies aan biodiversiteit.
Soortenrijkdom heeft niet alleen te maken met het aantal soorten in een bepaald gebied maar ook met de aantallen per soort die er voorkomen, en de verhouding daartussen.
Een park met 85% merels, 5% vinken, 5% mezen en 5% duiven heeft wat betreft vogelrijkdom een lagere biodiversiteit dan een soortgelijk park met 25% van ieder van de genoemde vogelsoorten: een evenwichtige verdeling van soorten verhoogt de biodiversiteit.
Het is mogelijk de biodiversiteit aan te geven met behulp van een getal. Hiervoor bestaan verschillende methoden.
Bekend is de *diversiteitsindex van Simpson* waarvoor geldt:

$$D = \frac{N(N-1)}{\sum n_i(n_i - 1)}$$

N = totaal aantal organismen
n_i = aantal organismen per soort

Hoe groter de diversiteitsindex des te groter is de biodiversiteit (soortenrijkdom).
In het gegeven voorbeeld van de vogelrijkdom in een park geldt bijvoorbeeld:

Park 1 : $D = \frac{100 * 99}{(85 * 84) + (5 * 4) + (5 * 4) + (5 * 4)} = 1{,}4$

Park 2 : $D = \frac{100 * 99}{4 * (25 * 24)} = 4{,}1$

Bij deze berekening hebben we procenten vertaald naar aantallen. In feite is dat alleen correct als het totaal aantal vogels in beide gevallen even groot is en ook de parken in oppervlakte vergelijkbaar zijn. Andere voorwaarden zijn: het aantal organismen dat vergeleken wordt mag niet te klein zijn. Je moet van beide biotopen evenveel organismen nemen en een betrouwbare telmethode (nette steekproef) nemen.
Voor het bepalen van de soortenrijkdom van planten wordt vaak gewerkt met een raster waarbij per roosterpunt wordt geïnventariseerd wat er groeit. Zo'n raster kan heel groot zijn bijv. 1 km x 1 km om de rijkdom aan boomsoorten in een bos vast te stellen.
Maar om de soortenrijkdom van een wegberm in kaart te brengen wordt vaak gebruik gemaakt van een "miniveldje" van 1 m x 1 m.

Voorbeeld:
Twee wegbermen worden met behulp van de miniveldje-en-raster-methode onderzocht op grassenrijkdom.

	Berm 1	Berm 2
Witbol	51	80
Kweekgras	9	5
frans raaigras	-	5
kruipertje	14	2
engels raaigras	8	-
reukgras	-	4
kropaar	10	-
grote vossenstaart	8	1
veldbeemdgras	-	3
Totaal	100	100

$$D_1 = \frac{100 * 99}{(51 * 50) + (9 * 8) + (14 * 13) + (8 * 7) + (10 * 9) + (8 * 7) + (3 * 2)} = 3{,}3$$

$$D_2 = \frac{100 * 99}{(80 * 79) + (5 * 4) + (5 * 4) + (2 * 1) + (4 * 3) + (1 * 0) + (3 * 2)} = 1{,}6$$

Hoewel berm 2 zeven grassoorten bevat (één meer dan berm 1) heeft berm 2 toch in vergelijking met berm 1 een lagere biodiversiteit aan grassen als gevolg van een minder evenwichtige samenstelling van het aantal soorten.

Sommige biologen definiëren de Simpson-index ook wel als volgt:

$$D = \frac{1}{\sum P_i^{\,2}}$$ waarin P_i de fractie van iedere aanwezige soort is.

In woorden: de diversiteit is gelijk aan de reciproke waarde van de som van het kwadraat van het aandeel (als fractie) dat iedere aanwezige soort in het geheel heeft.

In principe is er weinig verschil, zo krijgen we in dit geval voor berm 1:

$$D_1 = \frac{1}{0{,}51^2 + 0{,}09^2 + 0{,}14^2 + 0{,}08^2 + 0{,}10^2 + 0{,}08^2} = 3{,}2$$

en voor berm 2:

$$D_2 = \frac{1}{0{,}80^2 + 0{,}05^2 + 0{,}05^2 + 0{,}02^2 + 0{,}04^2 + 0{,}01^2 + 0{,}03^2} = 1{,}5$$

Populatiegrootte

Voor het bepalen van de grootte van een dierpopulatie is de methode vangen-merken-terugzetten-opnieuw vangen in zwang. Hiervoor geldt de zogenaamde Lincoln-index:

$$P = \frac{N_1 \cdot N_2}{n_2}$$

waarin P = populatiegrootte
N_1 = aantal dieren gevangen en gemerkt bij 1e vangbeurt
N_2 = totaal aantal dieren gevangen bij de 2e vangbeurt
n_2 = aantal gemerkte dieren bij de 2e vangbeurt

Om toevalsfactoren uit te sluiten moet het aantal dieren per vangbeurt niet te klein zijn (liefst tenminste 10% van de totale populatie). Andere voorwaarden zijn:
in de tussentijd mag het totaal aantal dieren niet veranderen door sterfte, geboorte of migratie. De dieren moeten homogeen over het gebied verdeeld zijn om toevalsfactoren uit te sluiten. De vangkans van gemerkte en ongemerkte dieren moet gelijk zijn (geen leergedrag).

Voorbeeld: Met een schepnet worden gedurende een half uur in een grote vijver 23 libelle larven gevangen, gemerkt met een watervaste viltstift en weer teruggezet. Na 2 uur wordt opnieuw een half uur gevist met het schepnet, wat resulteert in 19 gevangen libelle larven waarvan 6 gemerkt.
Volgens de Lincoln-index kan de populatie nu geschat worden op

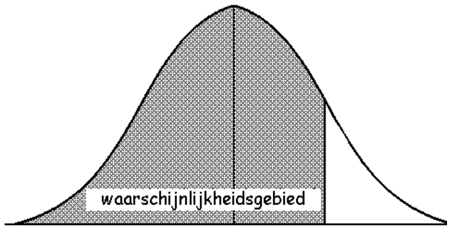
$$23 * \frac{19}{6} = 73$$

Bijlagen

Statistische tabellen en diagrammen

Normale verdeling (eenzijdig) (tabel)

De tabel toont het waarschijnlijkheidsgebied voor verschillende waarden van de excentriciteit u, te beginnen bij u = 0,0 en eindigend bij u = 3,49. Voorbeeld: als u = 0,58 dan is het waarschijnlijkheidgebied 0,719 d.w.z. 71,9%.

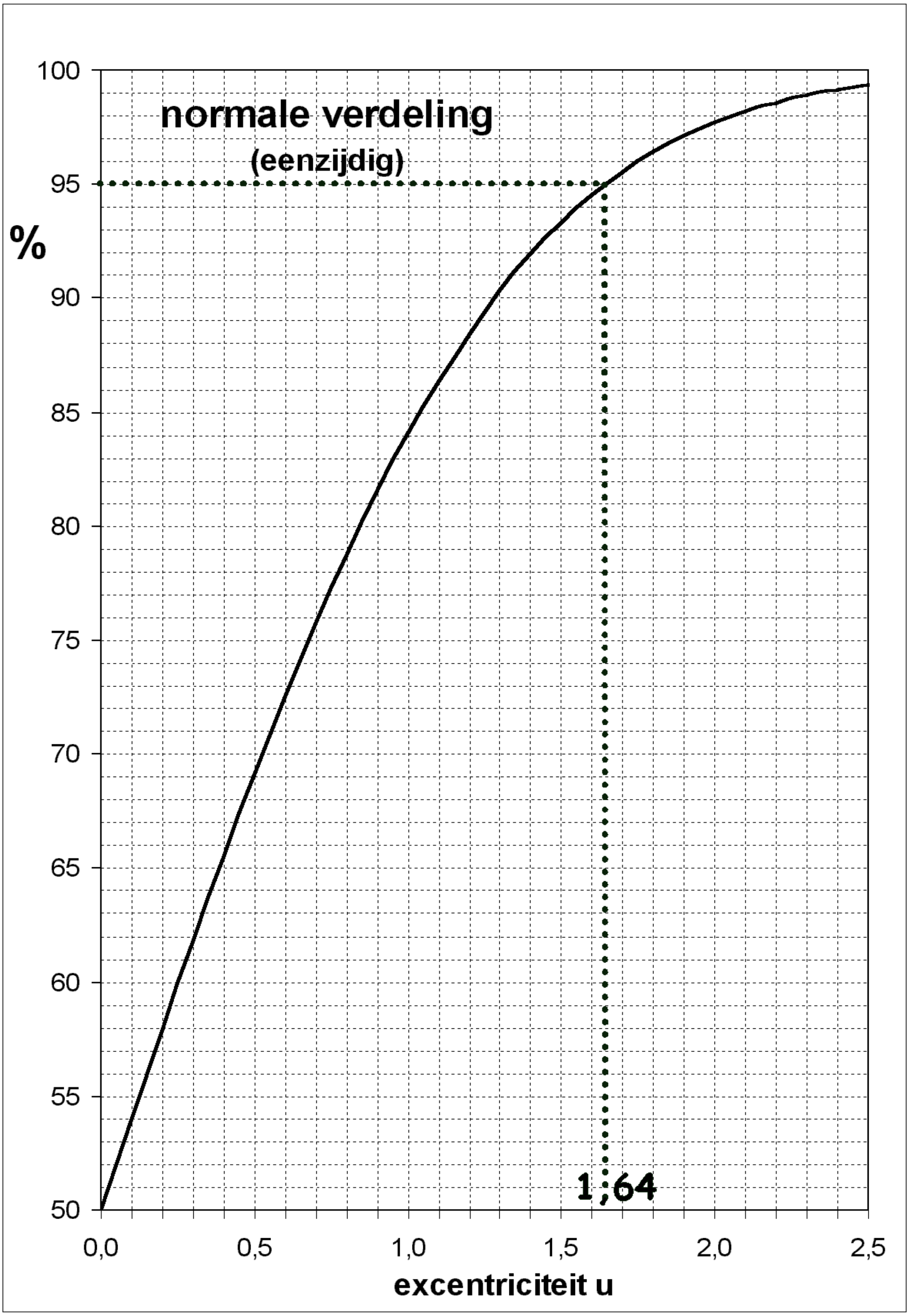


	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

Kijken we eenzijdig dan ligt de 95% grens bij u = 1,64
Kijken we tweezijdig dan ligt deze grens bij u = 1,96

Normale verdeling (eenzijdig): diagram

Grootte van het waarschijnlijkheidsgebied voor verschillende waarden van de excentriciteit u.



t-toets (tabel)

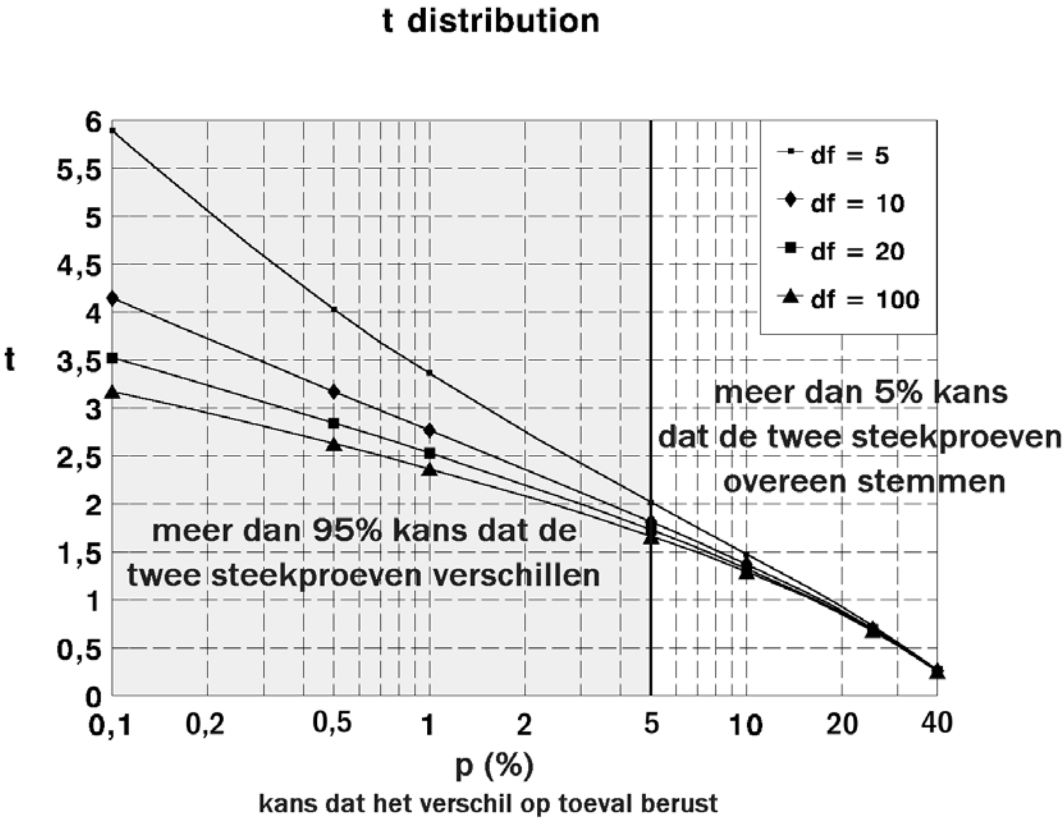
Waarden van t voor verschillende overschrijdingskansen p (in %) en vrijheidsgraden df (degree of freedom) bij eenzijdig toetsen.

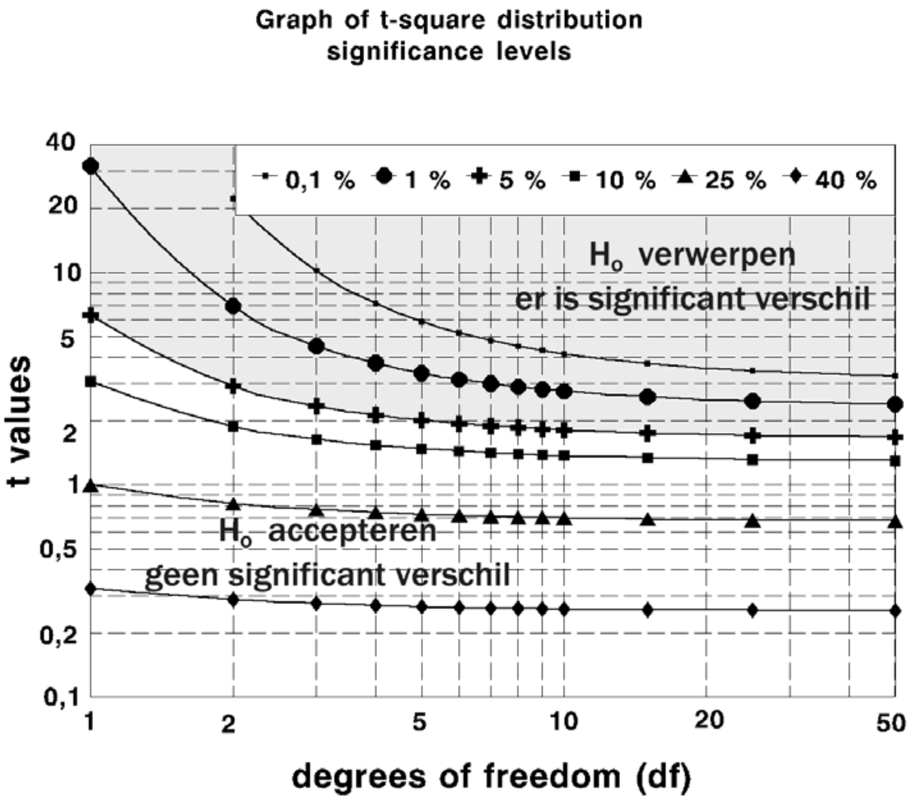
df	40 %	30 %	20 %	10 %	5%	2,5%	1%	0,5 %	0,05 %
1	0,325	0,727	1,376	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	636,619
2	0,289	0,617	1,061	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,598
3	0,277	0,584	0,978	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,941
4	0,271	0,569	0,941	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	0,267	0,559	0,920	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,859
6	0,265	0,553	0,906	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	0,263	0,549	0,896	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	5,405
8	0,262	0,546	0,889	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
9	0,261	0,543	0,883	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
10	0,260	0,542	0,879	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587
11	0,260	0,540	0,876	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,437
12	0,259	0,539	0,873	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
13	0,259	0,538	0,870	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221
14	0,258	0,537	0,868	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140
15	0,258	0,536	0,866	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073
16	0,258	0,535	0,865	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015
17	0,257	0,534	0,863	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,965
18	0,257	0,534	0,862	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,922
19	0,257	0,533	0,861	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,883
20	0,257	0,533	0,860	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850
21	0,257	0,532	0,859	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,819
22	0,256	0,532	0,858	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,792
23	0,256	0,532	0,858	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,767
24	0,256	0,531	0,857	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,745
25	0,256	0,531	0,856	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,725
26	0,256	0,531	0,856	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,707
27	0,256	0,531	0,855	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,690
28	0,256	0,530	0,855	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,674
29	0,256	0,530	0,854	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,659
30	0,256	0,530	0,854	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,646
40	0,255	0,529	0,851	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,551
60	0,254	0,527	0,848	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,460
120	0,254	0,526	0,845	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,373
∞	0,253	0,524	0,842	1 282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,291

Accepteer H_o als $p > 5$ %. Neem aan dat er significant verschil is als $p < 5$ %

N.B. *Sommige bronnen geven in t-toets tabellen niet de kans aan dat H_o moet worden geaccepteerd, maar juist moet worden verworpen, kortom 100 – p %. Let daar op.*

t-toets diagram





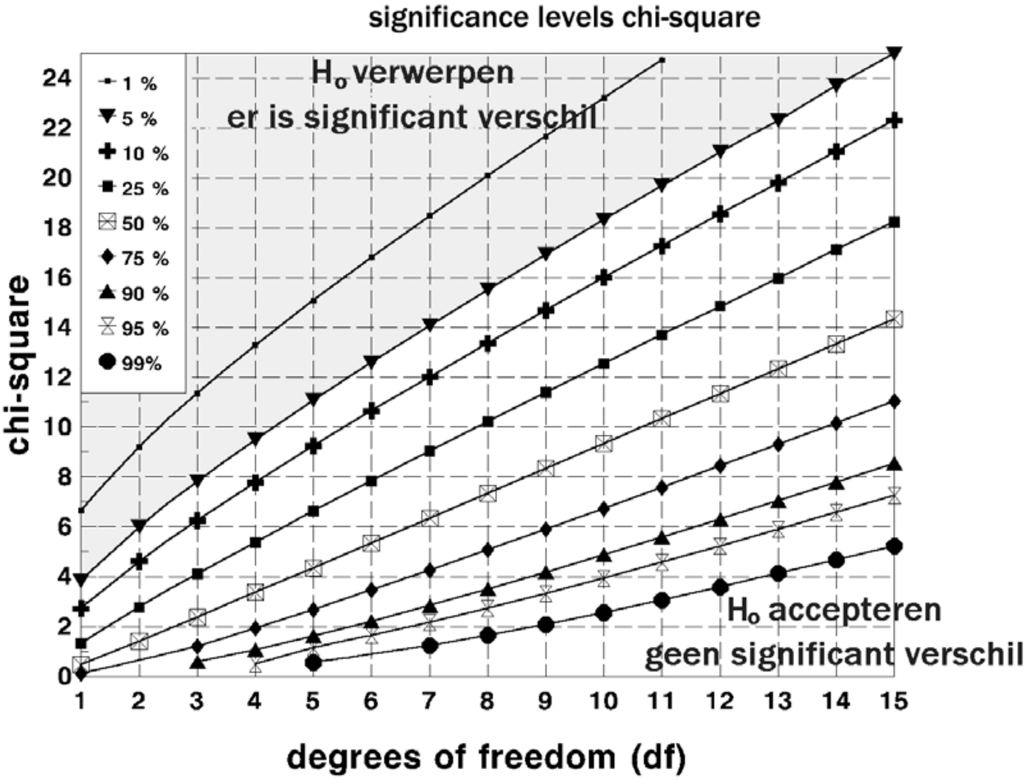
Chi – kwadraat (tabel)

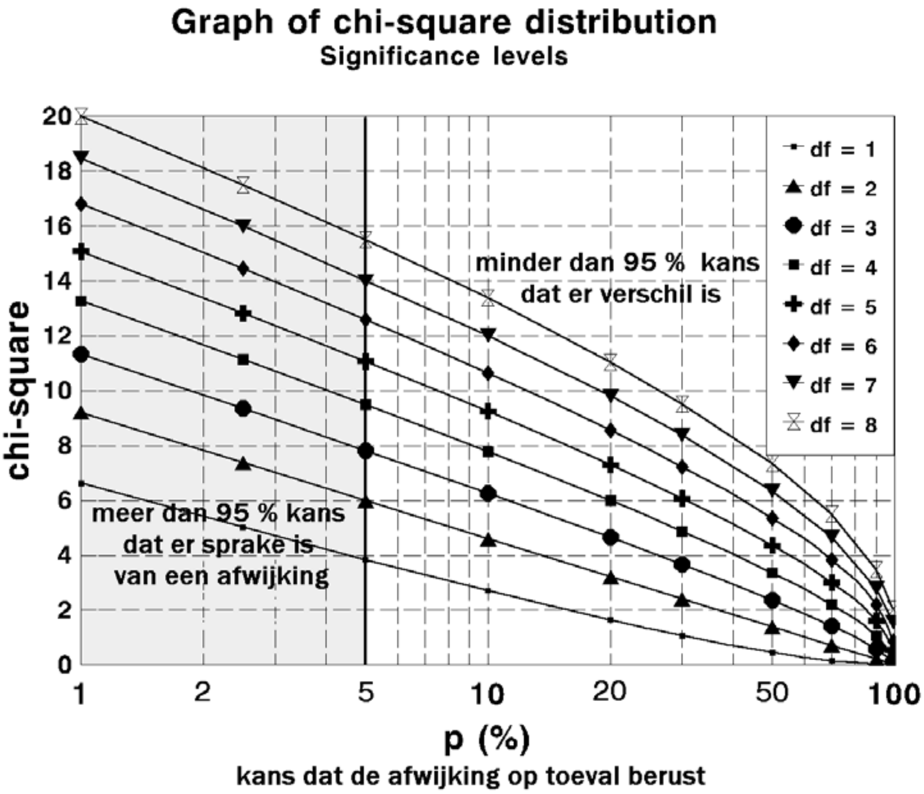
Waarden van chi-kwadraat voor verschillende overschrijdingskansen p (level of significance) en vrijheidsgraden df (degree of freedom).

df	p=99%	p=95%	p=90%	p=50%	p=10%	p=5%	p=1%	p=0,1%	df
1	0,00016	0,0039	0,016	0,46	2,71	3,84	6,63	10,83	1
2	0,02	0,10	0,21	1,39	4,60	5,99	9,21	13,82	2
3	0,12	0,35	0,58	2,37	6,25	7,81	11,34	16,27	3
4	0,30	0,71	1,06	3,36	7,78	9,49	13,28	18,46	4
5	0,55	1,14	1,61	4,35	9,24	11,07	15,09	20,52	5
6	0,87	1,64	2,20	5,35	10,64	12,59	16,81	22,46	6
7	1,24	2,17	2,83	6,35	12,02	14,07	18,48	24,32	7
8	1,65	2,73	3,49	7,34	13,36	15,51	20,09	26,12	8
9	2,09	3,32	4,17	8,34	14,68	16,92	21,67	27,88	9
10	2,56	3,94	4,86	9,34	15,99	18,31	23,21	29,59	10
11	3,05	4,58	5,58	10,34	17,28	19,68	24,72	31,26	11
12	3,57	5,23	6,30	11,34	18,55	21,03	26,22	32,91	12
13	4,11	5,89	7,04	12,34	19,81	22,36	27,69	34,53	13
14	4,66	6,57	7,79	13,34	21,06	23,68	29,14	36,12	14
15	5,23	7,26	8,55	14,34	22,31	25,00	30,58	37,70	15
16	5,81	7,96	9,31	15,34	23,54	26,30	32,00	39,29	16
17	6,41	8,67	10,08	16,34	24,77	27,59	33,41	40,75	17
18	7,02	9,39	10,86	17,34	25,99	28,87	34,80	42,31	18
19	7,63	10,12	11,65	18,34	27,20	30,14	36,19	43,82	19
20	8,26	10,85	12,44	19,34	28,41	31,41	37,57	45,32	20
21	8,90	11,59	13,24	20,34	29,62	32,67	38,93	46,80	21
22	9,54	12,34	14,04	21,34	30,81	33,92	40,29	48,27	22
23	10,20	13,09	14,85	22,34	32,01	35,17	41,64	49,73	23
24	10,86	13,85	15,66	23,34	33,20	36,42	42,98	51,18	24
25	11,52	14,61	16,47	24,34	34,38	37,65	44,31	52,62	25
26	12,20	15,38	17,29	25,34	35,56	38,88	45,64	54,05	26
27	12,88	16,15	18,11	26,34	36,74	40,11	46,96	55,48	27
28	13,56	16,93	18,94	27,34	37,92	41,34	48,28	56,89	28
29	14,26	17,71	19,77	28,34	39,09	42,56	49,59	58,30	29
30	14,95	18,49	20,60	29,34	40,26	43,77	50,89	59,70	30
40	22,16	26,51	29,05	39,34	51,81	55,76	63,69	73,40	40
60	37,48	43,19	46,46	59,33	74,40	79,08	88,38	99,61	60
80	53,54	60,39	64,28	79,33	96,58	101,88	112,33	124,84	80
100	70,06	77,93	82,36	99,33	118,50	124,34	135,81	149,45	100

N.B. *Sommige bronnen geven in chi-kwadraat tabellen niet de overschrijdingskans p aan, maar 100 – p (= kans op een significant verschil). Let daar op.*

Chi-kwadraat diagrammen





Notities